II разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете науке и технолошког развоја Републике Србије

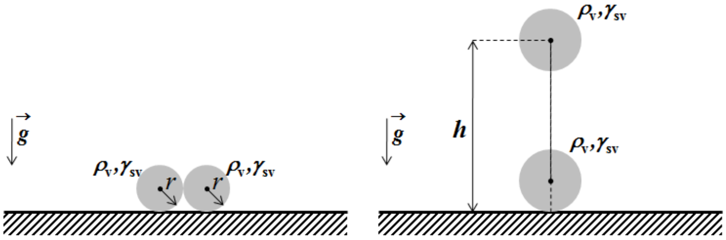
ЗАДАЦИ-АЛФА КАТЕГОРИЈА*

Крагујевац
23-24. април 2021.

1. Топлотно изолован, хоризонтално постављен и непокретан суд подељен је клипом на два дела. Посуда и топлотно непроводни клип не могу да пропуштају честице гаса. Клип је закочен тако да не може да се креће у хоризонталном правцу. У левом делу суда запремине V_1 налазе се два мола идеалног гаса температуре T_1. У десном делу суда запремине $V_2 = 2V_1$ је вакуум (Слика 1). У одређеном тренутку тренутно извучемо клип из суда, при чему гас након тога спонтано испуни цео суд. Рачунским путем доказати да је описани тердмодинамички процес иреверзибилан. Ентропија идеалног гаса дата је формулом $S = nc_V \cdot \ln(T) + nR\cdot \ln(V) + S_0$, где је: T - апсолутна температура идеалног гаса, V - запремина идеалног гаса, n - број молова идеалног гаса, $R = 8{,}314\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\cdot mol}}$ - универзална гасна константа, c_V - моларни топлотни капацитет идеалног гаса при константној запремини, ln - природни логаритам, а S_0 - константа. Димензије клипа занемарити. **[15 поена]**

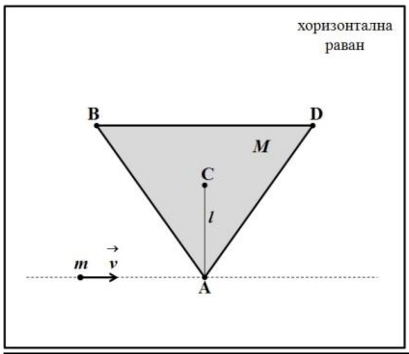
Слика 1

2. Две капљице воде сферног облика једнаких полупречника $r = 1{,}25\,\mathrm{mm}$ налазе се у ваздуху и мирују на хоризонталној подлози која је суперхидрофобна. Ако дође до спајања две капљице воде у једну већу капљицу, такође сферног облика, одредити вредност висине h до које ће већа капљица вертикално одскочити (Слика 2). Занемарити отпор ваздуха и међусобну гравитациону потенцијалну енергију мањих капљица. Сматрати да је облик капљица све време сферан. Густина воде је $\rho_v = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$, док је коефицијент површинског напона воде једнак $\gamma_{sv} = 0{,}072\ \mathrm{N/m}$. Убрзање силе Земљине теже је $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$. **[20 поена]**



Слика 2

3. Танка (занемарљиве вредности висине) призма масе M, чија је основа једнакостранични троугао (троугао ABD) мирује на хоризонталној подлози. Центар масе призме C се налази дуж висине једнакостраничног троугла на растојању l од тачке A ($\overline{\mathrm{AC}} = l$) као што је приказано на Слици 3. Момент инерције призме у односу на осу која пролази кроз центар масе и нормална је на основу призме је $I = \dfrac{1}{4}Ml^2$. Тело масе m, занемаљивих димензија, креће се по хоризонталној подлози брзином константног интензитета v, у правцу и смеру као што је приказано на слици 3, и удара у врх призме. Удар тела у призму је апсолутно еластичан и тренутан. Након удара тело наставља кретање непромењеним правцем и смером. Трење и све силе отпора у систему занемарити. Све наведене величине у задатку су познате. Одредити непосредно након удара тела у призму: **а)** интензитет брзине тела масе m, **б)** интензитет брзине центра масе призме, **в)** интензитет угаоне брзине ротације призме око њеног центра масе. **[20 поена]**



Слика 3

4. Идеални циклус мотора са унутрашњим сагоревањем почиње адијабатским сабијањем ваздуха (процес $1 \to 2$), затим следи изохорско повећање притиска ваздуха (процес $2 \to 3$), након тога следи изобарско ширење ваздуха (процес $3 \to 4$), затим адијабатско ширење ваздуха (процес $4 \to 5$), и на крају ваздух се доводи у почетно стање изохорским процесом (процес $5 \to 1$).

а) Нацртати дати циклус на $p - V$ дијаграму и на $T - S$ дијаграму. **[5 поена]**

б) Ваздух сматрати идеалним гасом. Коефицијент адијабате за ваздух је γ . Ако се уведу параметри $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$, $\rho = \frac{V_4}{V_3}$ и $\varphi = \frac{p_3}{p_2}$, где су индексима означена стања ваздуха, одредити израз за коефицијент корисног дејства циклуса искључиво преко величина ε , ρ , φ и γ . **[13 поена]**

в) Одредити вредност коефицијента корисног дејства циклуса за следеће вредности $\varepsilon = 10$, $\rho = 1{,}3$, $\varphi = 2{,}2$ и $\gamma = 1{,}4$. **[2 поена]**

Напомена. Задатак из обраде резултата мерења добићете на посебном листу папира!

***У алфа категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

Решења свих задатака треба јасно образложити са јасно дефинисаним физичким законима и величинама које користите приликом решавања задатака. Нарочито дефинисати ознаке које уводите а које нису уобичајене.

Обавезно на сваком листу папира (и на милиметарском папиру) који предајете напишите своју шифру, и обавезно нумеришите сваку страну!

Задатке припремио: Владимир Чубровић
Рецензенти: проф. др Иван Живић, доц. др Момир Арсенијевић и Милош Адамовић, ПМФ Крагујевац
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: доц. др Владимир Марковић, ПМФ Крагујевац

Свим такмичарима желимо успешан рад!

II разред

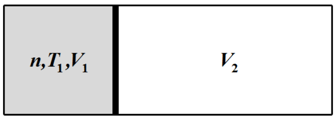
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

Крагујевац
23-24. април 2021.

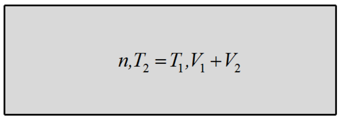
РЕШЕЊА-АЛФА КАТЕГОРИЈА*

1. Гас са околином не размењује топлоту јер је суд топлотно изолован. Рад при слободном ширењу гаса једнак је нули, јер нема спољашњих сила које врше рад над гасом, као што ни гас приликом ширења не врши рад над неким другим телом. Из претходног следи да се унутрашња енергија гаса не мења тако да је температура гаса у почетном и у крајњем равнотежном стању једнака $T_1 = T_2$ [**4п**].

По услову задатка је $n = 2\,\mathrm{mol}$. Ентропија гаса пре извлачења клипа (слика 1) је $S_1 = nc_V \cdot \ln(T_1) + nR \cdot \ln(V_1) + S_0$ [**3п**]. Ентропија гаса, након што се клип извуче и гас спонтано испуни цео суд (слика 2), је $S_2 = nc_V \cdot \ln(T_1) + nR \cdot \ln(V_1 + V_2) + S_0$ [**3п**]. Промена ентропије гаса је $\Delta S = S_2 - S_1$, односно $\Delta S = nR \cdot \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) \approx 18{,}3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ [**2+1п**]. Како је $\Delta S > 0$ следи да је дати процес иреверзибилан [**2п**].



Слика 1



Слика 2

2. Запремина једне мање капљице воде је $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$, док је запремина капљице воде настале спајањем две мање капљице воде једнака $V_1 = \frac{4}{3} r_1^3 \pi$, при чему важи $V_1 = 2V$ тј. $\frac{4}{3} r_1^3 \pi = 2 \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi$ тако да је $r_1 = 2^{1/3} \cdot r$ [**4п**]. Означимо са h висину у односу на хоризонталну подлогу до које одскочи већа капљица воде. Укупна енергија две мање капљице воде на хоризонталној подлози је $E = 2mgr + 2 \cdot (4\gamma_{\mathrm{sv}} r^2 \pi)$ [**5п**], док је укупна енергија веће капљице на висини h једнака $E_1 = 2mgh + 4\gamma_{\mathrm{sv}} r_1^2 \pi$ [**5п**]. Како је $m = \rho_{\mathrm{v}} \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi$ [**1п**] и $r_1 = 2^{1/3} \cdot r$ претходни изрази су облика $E = \frac{8}{3} \pi \rho_{\mathrm{v}} g r^4 + 2 \cdot 4\gamma_{\mathrm{sv}} r^2 \pi$ и $E_1 = \frac{8}{3} \pi \rho_{\mathrm{v}} g r^3 h + 2^{2/3} \cdot 4\gamma_{\mathrm{sv}} r^2 \pi$. Из закона одржања енергије следи $E = E_1$. Из претходног следи да је тражена висина једнака $h = \frac{3\gamma_{\mathrm{sv}}(1 - 2^{-1/3})}{\rho_{\mathrm{v}} g r} + r \approx 4{,}88\,\mathrm{mm}$ [**4+1п**].

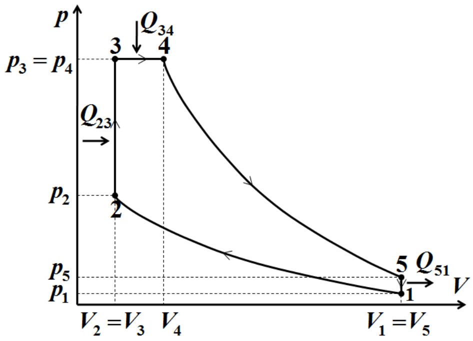
3. Означимо са v' интензитет брзине тела масе m непосредно након удара тела у призму, затим са V интензитет брзине центра масе призме непосредно након удара тела у призму, и на крају са ω интензитет угаоне брзине ротације призме око њеног центра масе непосредно након удара тела у призму. У систему тело-призма делују само унутрашње силе, а удар тела у призму је апсолутно еластичан и тренутан. Из закона одржања импулса следи једначина $mv = mv' + MV$ [**3п**] (1). Момент инерције призме у односу на осу која пролази кроз центар масе и нормална је на основу призме је $I = \frac{1}{4} Ml^2$. Закон одржања момента импулса, у односу на центар масе призме, приказан је једначином $mv \cdot l = mv' \cdot l + \frac{Ml^2}{4} \cdot \omega$ [**3п**] (2). Закон одржања енергије представљен је једначином $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{4} Ml^2 \cdot \frac{\omega^2}{2}$ [**3п**] (3).

а) Решавањем претходних једначина добијамо квадратну једначину по непознатој v' и она гласи $(M + 5m) \cdot v'^2 - 10mv \cdot v' + (5m - M)v^2 = 0$ [**2п**], чија су решења $v_1' = \frac{5m - M}{M + 5m} v$ и $v_2' = \frac{5m + M}{M + 5m} v = v$, при чему је физички оправдано прво решење, тако да је $v' = \frac{5m - M}{M + 5m} \cdot v$ [**3п**] (4)

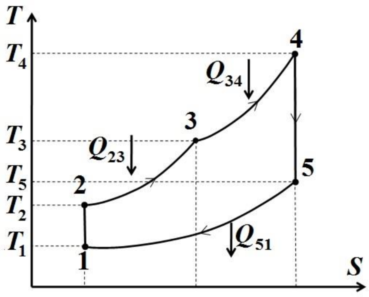
б) Из једначине (1) следи да је $V = \frac{m(v - v')}{M}$, и када уврстимо израз (4), добијамо $V = \frac{2mv}{M + 5m}$ [**3п].**

в) Из једначине (2) следи да је $\omega = \frac{4m(v - v')}{Ml}$, и када уврстимо израз (4), добијамо $\omega = \frac{8mv}{(M + 5m)l}$ [**3п].**

4. а) Тачно нацртан циклус на $p-V$ дијаграму (Слика 3) носи 2,5 поена. Тачно нацртан циклус на $T-S$ дијаграму (Слика 4) носи 2,5 поена .



Слика 3



Слика 4

б) ПРВИ НАЧИН Коефицијент корисног дејства циклуса је $\eta = 1 - \dfrac{Q_{51}}{Q_{23}+Q_{34}}$**,** при чему је $Q_{51} = nc_V(T_5 - T_1)$ **[1п]**, $Q_{23} = nc_V(T_3 - T_2)$ **[1п]** и $Q_{34} = nc_p(T_4 - T_3)$ **[1п]** тако да је $\eta = 1 - \dfrac{(T_5 - T_1)}{(T_3 - T_2) + \gamma(T_4 - T_3)}$ [**1п**]. За процес $1 \to 2$ важи $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$ **[1п]** тако да је $T_2 = \varepsilon^{\gamma-1}T_1$ [**1п**]. За процес $2 \to 3$ важи $\dfrac{T_3}{T_2} = \dfrac{p_3}{p_2}$ **[1п]** тако да је $T_3 = \varphi T_2$ односно $T_3 = \varphi\varepsilon^{\gamma-1}T_1$ [**1п**]. За процес $3 \to 4$ важи $\dfrac{T_4}{T_3} = \dfrac{V_4}{V_3}$ [**1п**], тако да је $T_4 = \dfrac{V_4}{V_3}T_3 = \rho T_3 = \rho\varphi\varepsilon^{\gamma-1}T_1$ **[1п].** За процес $4 \to 5$ важи једначина $T_4V_4^{\gamma-1} = T_5V_5^{\gamma-1}$ **[1п],** при чему је $V_5 = V_1$ и $V_2 = V_3$, одакле следи $T_5 = T_4\left(\dfrac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = T_4\left(\dfrac{V_4}{V_3}\cdot\dfrac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} = T_4\left(\dfrac{V_4}{V_3}\cdot\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = T_4\left(\dfrac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1}$, тако да је $T_5 = \rho^{\gamma}\varphi T_1$ [**1п**]. На основу претходних израза добијамо да је коефицијент корисног дејства циклуса $\eta = 1 - \dfrac{(\rho^{\gamma}\varphi - 1)}{\varepsilon^{\gamma-1}\left[\varphi - 1 + \gamma\varphi(\rho - 1)\right]}$ **[1п].**

б) ДРУГИ НАЧИН. Коефицијент корисног дејства циклуса је $\eta = \dfrac{A_{12}+A_{34}+A_{45}}{Q_{23}+Q_{34}}$**,** при чему је $Q_{23} = nc_V(T_3 - T_2)$ **[1п],** $Q_{34} = nc_p(T_4 - T_3)$ **[1п],** $A_{12} = -nc_V(T_2 - T_1)$ **[0,5п],** $A_{34} = p_3(V_4 - V_3) = nRT_3(\rho - 1)$ [**0,5п**], $A_{45} = -nc_V(T_5 - T_4)$ [**0,5п**] тако да је $\eta = \dfrac{-T_2 + T_1 + T_3(\rho-1)(\gamma-1) - T_5 + T_4}{(T_3 - T_2) + \gamma(T_4 - T_3)}$ [**0,5п**]. За процес $1 \to 2$ важи $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$ **[1п]** тако да је $T_2 = \varepsilon^{\gamma-1}T_1$ [**1п**]. За процес $2 \to 3$ важи $\dfrac{T_3}{T_2} = \dfrac{p_3}{p_2}$ **[1п]** тако да је $T_3 = \varphi T_2$ односно $T_3 = \varphi\varepsilon^{\gamma-1}T_1$ [**1п**]. За процес $3 \to 4$ важи $\dfrac{T_4}{T_3} = \dfrac{V_4}{V_3}$ [**1п**], тако да је $T_4 = \dfrac{V_4}{V_3}T_3 = \rho T_3 = \rho\varphi\varepsilon^{\gamma-1}T_1$ **[1п].** За процес $4 \to 5$ важи једначина $T_4V_4^{\gamma-1} = T_5V_5^{\gamma-1}$ **[1п] ,** при чему је $V_5 = V_1$ и $V_2 = V_3$, одакле следи $T_5 = T_4\left(\dfrac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = T_4\left(\dfrac{V_4}{V_3}\cdot\dfrac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} = T_4\left(\dfrac{V_4}{V_3}\cdot\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = T_4\left(\dfrac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1}$, тако да је $T_5 = \rho^{\gamma}\varphi T_1$ [**1п**]. На основу претходних израза добијамо да је коефицијент корисног дејства циклуса $\eta = 1 - \dfrac{(\rho^{\gamma}\varphi - 1)}{\varepsilon^{\gamma-1}\left[\varphi - 1 + \gamma\varphi(\rho - 1)\right]}$ **[1п].**

в) Вредност коефицијента корисног дејства циклуса је $\eta \approx 0{,}59$ **[2п].**